Pendelversuche.

Von **Paul Czermak** und **Richard Hiecke.**

(Arbeit aus dem physikalischen Institute der Universität Graz.)

(Mit 6 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Jänner 1885.)

Bei der bekannten Schwierigkeit, der die Versuche mit einem sphärischen Pendel unterworfen sind, dürfte vielleicht ein Apparat einiges Interesse beanspruchen, welcher auf graphischem Wege die Bewegung eines Raumpendels fixirt, und so nicht nur ein brauchbarer Demonstrationsapparat ist, sondern, wie die mitgetheilten Resultate zeigen werden, auch zu exacteren Messungen gebraucht werden kann.

Da es bei einer graphischen Methode hauptsächlich darauf ankommt, den Einfluss der Reibung des schreibenden Theiles möglichst klein zu machen, so wurde bei den folgenden Versuchen eine Pendelkugel von circa 30 Klgr. Gewicht verwendet, ferners diente als Zeichenfläche ein sogenannter Lackcarton mit Kreidengrund, der auf einer Spiegelglasplatte aufgezogen einer polirten Marmorplatte glich. Auch war der Druck der schreibenden Spitze beliebig zu ändern und dieselbe in einem beliebigen Momente der Bewegung des Pendels in und ausser Thätigkeit zu setzen.

Diese letzten zwei Bedingungen und die Forderung, dass die schreibende Spitze genau in die Verlängerung des Pendelfadens zu liegen komme, bedingten die Construction des Schreibeapparates, welcher folgende Einrichtung hatte.

An einer Eisenplatte *a* (Fig. 1) ist einerseits eine Parallelführung *b* eingeschraubt, welche mittelst der Schraube *c* ein Messingstück *d* verschiebt; anderseits eine Führung *e* für ein Bleigewicht *f*, welches durch eine Parallelogrammsteuerung *g*

mit dem Messingstücke *d* verbunden ist und so den Apparat ausbalancirt. In der Mitte dieser Eisenplatte *a* ist eine Hülse angebracht, mit welcher der ganze Apparat an einem vorstehenden Zapfen *i* der Pendelkugel befestigt wird.

Das Messingstück *d* trägt nun in einer Hülse den Stiel einer Gabel *k*, welche in Spitzen drehbar den Schreibehebel *l* hält. An diesem Hebel ist ein Messingklötzchen mit einer Hülse *m* verstellbar angeschraubt, in welche ein fein ausgezogenes und gut abgeglühtes Glasrohr gekittet ist.

Dieses dient zur Aufnahme einer etwas verdünnten Anilintinte. Ganz am Ende des Hebels ist noch ein hackenförmig gebogener Draht *n* befestigt. Auf der andern Seite ist ein Gegengewicht *o* verschiebbar, welches den Druck des Schreiberohres beliebig zu ändern gestattet.

Durch die Parallelführung *b* und die Schraube *c* ist man daher im Stande, die Schreibespitze in der einen Richtung um eine Strecke von circa 4 Ct. zu verschieben. Um nun derselben noch eine zu der früheren Richtung senkrechte Verschiebung ertheilen zu können, ist an dem oben vorstehenden Ende der Gabel *k* ein verstellbarer Arm *p* angebracht, welcher durch eine Feder gegen die Schraube *r* gedrückt wird.

Um nun den Schreibehebel beliebig ausheben und herabfallen lassen zu können, ist unterhalb der Platte *a* ein Elektromagnet *s* eingeschraubt, welcher den Arretierhebel *t* beim Stromschlusse anzieht. Dadurch fällt die Feder, welche sonst durch das Übergewicht *u* des Arretierhebels an dem Hacken *n* empor gezogen ist, um 6—10 Mm. herab, je nach der Stellung des Hackens *n*.

Die mit diesem Schreibeapparate versehene Pendelkugel wurde nun in folgender Art aufgehangen. Da es leider nicht möglich war, einen eingemauerten Aufhängepunkt herzustellen, so musste durch eine mit Balken verspreitzte Eisenbahnschiene ein möglichst fester Unterstützungspunkt geschaffen werden. Auf diese Schiene war ein Balken *A* (Fig 1) geschraubt, welcher die eigentliche Aufhängevorrichtung des Pendels trug. Diese bestand in einer rechteckigen Eisenplatte *B*, welche mit vier Schrauben *C* an dem Balken befestigt war und ein glashartes Stahlstück *D* trug. In diesem war eine Mulde *E* eingeschliffen,

in welcher ein ebenfalls glasharter hochpolirter Stahlconus *F* sass. Dieser war in eine Eisenklammer *G* geschraubt, an deren anderem Ende der circa 4 Mm. dicke eiserne Pendeldraht *H* mittelst zweier Muttern befestigt war. Am Ende dieses Drahtes hing die Pendelkugel, an deren unterhalb vorstehendem Zapfen *i* der Schreibeapparat angeschraubt war.

Die elektrische Leitung zu dem Arretirelektromagneten wurde vermittelt eines Theils durch den Pendeldraht über den Contactpunkt des Conus mit der Pfanne zu der Batterie *O*, anderseits durch einen neben dem Pendeldraht gespannten dünnen Leitungsdraht *L*, der, mit Hartgummiklötzchen *M* befestigt, genau in der Verlängerung des Pendelfadens von oben in ein Quecksilbergefäss *N* tauchte und von hier zum Morsetaster *K* geleitet war, der mit dem andern Pole der Batterie in Verbindung stand.

Nach sorgfältiger Reinigung und Nivellirung der so nahe wie möglich an die Schreibespitze herangebrachten Zeichenfläche musste die gut ausbalancirte Feder mittelst der Schrauben *C* und *R* centrirt werden; dann war die Einrichtung zu Versuchen bereit.

Ein Zeichen, dass die Reibung der Schreibevorrichtung sehr gering war, bestand darin, dass bei elliptischen Schwingungen des Pendels Ellipsen gezeichnet werden konnten, welche sich vollständig schlossen, so dass bei einem Umlaufe des Pendels noch keine merkbare Abnahme der Schwingungsamplituden zu sehen war, wie Fig. 2, welche zwei von diesem Pendel gezeichnete Ellipsen darstellt, deutlich zeigt.

Es wurden nun folgende drei Arten von Versuchen mit dieser Einrichtung gemacht:

I. der Foucault'sche Pendelversuch,

II. Lissajous'sche Figuren, deren Schwingungsverhältniss nahe der Einheit liegt, und

III. die Drehung der grossen Achse bei elliptischen Schwingungen eines Raumpendels.

Hier muss aber noch erwähnt werden, dass manche Verbesserungen und Änderungen sehr nahe liegend sind, aber aus Mangel an Zeit und Aufwand von Mitteln von denselben Umgang genommen wurde und anderseits gerade darin ein Vorzug gesucht

wurde, mit den möglichst geringen und oft primitiven Mitteln eine relativ grosse Genauigkeit zu erzielen.

I. Der Foucault'sche Pendelversuch.

Bei diesem Versuche hatte das Pendel eine Länge von 13·15 Metern und es trat auch hier jene bekannte Erscheinung, welche auf die Resultate von so grossem Einflusse ist, auf, nämlich dass das Pendel aus seinen anfänglich ebenen Schwingungen in elliptische überging. Bei der hier gebrauchten Einrichtung waren es hauptsächlich drei Ursachen, welche dies veranlassten und zwar die nach verschiedenen Azimuthen verschiedenen 1. Festigkeitsverhältnisse des Aufhängepunktes, 2. Krümmungsverhältnisse des Conus und der Pfanne und 3. Trägheitsmomente des Pendels.

Durch diese Ursachen, welche bei keinem Raumpendel ganz zu beseitigen sind, wird bewirkt, dass das Pendel nach verschiedenen Azimuthen etwas verschiedene Schwingungsdauern hat, was immer Anlass gibt zum Auftreten einer Lissajous'schen Figur, welche einem Schwingungsverhältnisse entspricht, das sehr nahe der Einheit liegt. Die so entstehenden Ellipsen besitzen dann einen bestimmten Sinn, in welchem sie durchlaufen werden und einen bestimmten Drehungssinn ihrer grossen Achsen. Sind die Schwingungen einmal elliptisch, so kommt noch eine Drehung der grossen Achse durch diese Erscheinung allein hinzu, so dass wenn zwei um eine bestimmte Zeit aufeinander folgende Lagen der grossen Achse, als Mass des Winkels, welcher der unter der geographischen Breite des Beobachtungsortes vor sich gegangenen Drehung der Pendelebene entsprechen soll, gelten sollen, das Resultat von diesen Störungen sehr beeinflusst ist.

Eine Überlegung zeigt leicht, dass bei nahezu senkrechter Lage jener Azimuthe, in welchen das Pendel seine grösste und kleinste Schwingungsdauer hat, die störenden Einflüsse, welche durch die unter verschiedenen Azimuthen auftretenden Lissajous'schen Figuren veranlasst werden, sich bei einem Umgang von 180° beinahe ganz aufheben wegen der geraden Anzahl von Wechsel im Sinne der Rotation, in welchem die Ellipsen durchlaufen werden und des Sinnes, in welchem die Achsen derselben sich drehen.

Es wurde daher der Versuch in folgender Weise ausgeführt.

Um den Äquator der Pendelkugel wurde nämlich ein Ring *P* (Fig. 1) gelegt, welcher zwölf um 15° von einander abstehende Ösen p_1 bis p_{12} trug.

Jeder Öse entsprach in der Wand ein Haken, an welchem eine Spule *R* mit dünnem Spagat gehängt werden konnte. Mittelst eines kleinen, an das Ende des Fadens geknüpften Drahthäkchens konnte die Kugel durch Aufrollen der Spule vorsichtig nach jedem der zwölf Azimuthe herausgezogen werden. Es wurde nun auf der Zeichenfläche ein Kreis angedeutet, dessen Mittelpunkt unter die in Ruhe befindliche Schreibespitze zu liegen kam und einen Durchmesser von circa 40 Ctm. hatte. Dann wurde unter jedem dieser zwölf Azimuthe ein Foucault'scher Versuch in ganz gleicher Weise ausgeführt. Die Kugel wurde so weit herausgezogen, bis die Federspitze an die Peripherie des vorgezeichneten Kreises kam, dann mit dämpfendem Pinsel beruhigt und nach einiger Zeit abgebrannt. In dem Momente, wo der Secundenzeiger den Beginn der nächsten Minute anzeigte, wurde die erste Marke gemacht und die Feder während eines ganzen Hin- und Herganges schreiben gelassen, wobei immer eine einzige gerade Linie entstand; ein Zeichen, dass das Pendel vollkommen beruhigt seine Schwingungen begonnen hatte. Nach genau 15 Minuten wurde die Feder wieder fallen gelassen und zwar wieder so lange, bis sie ihre Anfangslage von derselben Seite erreicht hatte. Diese zweite Marke war aber fast immer schon eine langgestreckte Ellipse. Und zwar zeigte sich ein ganz regelmässiger Verlauf in der Grösse der kleinen Achsen dieser Ellipsen und in dem Sinne, in welchem sie durchlaufen wurden.

Wie Fig. 3, welches eine verkleinerte Copie einer solchen Beobachtungsreihe darstellt, zeigt, traten an zwei, fast um 90° auseinanderliegenden Stellen keine Ellipsen auf. In den zwischenliegenden Quadranten nahmen die kleinen Achsen der Ellipsen zu bis zu einem grössten Werthe und dann wieder ab bis zur nächsten Nullstelle.

Der Sinn, in welchem die Ellipsen durchlaufen wurden, war in jedem Quadranten entgegengesetzt jenem im Nachbar-

quadranten, wie es die Pfeile in der Zeichnung andeuten. Von dem Mittelwerthe aus einer solchen Beobachtungsreihe ist daher ein dem theoretischen Werthe ziemlich nahe liegender zu erwarten.

Das Ausmessen der Winkel, welche zwei Marken einschlossen, geschah in der Art, dass aus dem gemeinsamen Mittelpunkte aller zwölf Versuche ein Kreis geschlagen wurde, dessen Peripherie alle Marken schnitt. Dann wurde mittelst eines Massstabes, dessen Nonius noch 0·02 eines Millimeters abzulesen gestattete, der Durchmesser dieses Kreises und die Sehnen ausgemessen, welche die Schnittpunkte der Marken auf der Peripherie des Kreises bestimmten. Die so gerechneten Winkel konnten als bis auf eine Bogenminute genau gemessen betrachtet werden. Da im ganzen Umkreise von 360° die Sehnen gemessen wurden, so fiel auch eine Art Excentricitätsfehler, welcher durch die Senkung der Feder an ihrem Hebelarme entstand, fast vollständig heraus. Diese Senkung der Feder bei verschiedenen Amplituden des Pendels ist auch der Grund, warum die gezeichnete Curve nicht ganz strenge genommen die Centralprojection der Bewegung des Massenmittelpunktes mit dem Aufhängepunkt als Centrum der Projection ist; — bei grösserer Pendellänge und hinreichend grossem Hebelarme der Feder ist jedoch diese Abweichung sehr gering.

Um den Verlauf der in den verschiedenen Azimuthen erhaltenen Werthe besser übersehen zu können, wurden dieselben als Ordinaten zu den Azimuthen als Abscissen eingetragen. Aus diesen Curven konnte man sehr gut den Einfluss ersehen, welchen eine Veränderung in den die Störungen bewirkenden Ursachen hervorbrachten.

Zu erwähnen ist vielleicht noch, dass die Azimuthe nicht der Reihe nach durchgenommen wurden, sondern, um einer Einseitigkeit durch Abnützung des Conus und der Pfanne vorzubeugen, wurden die einzelnen Beobachtungen in Intervallen von 75° und 105° vorgenommen, bis alle zwölf Azimuthe ausgefüllt waren.

Die erhaltenen Resultate, von denen Fig. 4 die zugehörigen Curven darstellt, waren folgende:

Drehung der Pendelebene in einer Stunde.

Azimuth	Alter Conus und Pfanne aus weichem Stahl I.	Aufhängebalken neu verspreizt und verkeilt II.	Neuer Conus und Pfanne aus glashartem Stahl III.	Conus und Pfanne neu polirt IV
0°	10°23'4	10°47'1	10°53'4	10°55'0
15	10 17 8	10 40 8	10 46 6	11 16 6
30	10 29 2	10 53 6	10 35 4	10 48 3
45	11 05 5	11 12 1	10 42 8	10 33 7
60	11 08 6	11 17 4	11 10 5	10 35 1
75	11 33 2	11 08 9	11 09 8	10 34 0
90	11 27 9	11 32 6	11 31 0	10 46 4
105	11 27 5	11 28 3	11 03 7	11 24 4
120	10 54 0	11 05 6	11 27 7	11 31 0
135	11 05 3	11 05 8	11 04 4	11 12 7
150	10 59 5	10 56 8	10 49 0	11 12 4
165	10 47 1	10 19 9	10 55 1	11 13 4
Mittelwerth	10°59'05"	11°02'24"	11°00'48"	11°00'13"
Abweichung	−1'43"	+1'36"	±0'00"	−0'35"

Da der theoretische Werth für die Drehung der Pendelebene in einer Stunde für den Beobachtungsort 11°00'48" beträgt, so weichen die obigen Mittel nur wenig von demselben ab. Dadurch scheint gezeigt, dass nach dieser Methode unter verhältnissmässig ungünstigen Umständen und ohne jede Correctionsrechnung gute Resultate erhalten werden können.

In dem Werke von H. Kammerling Onnes „Nieuwe bewijzen voor de aswenteling der aarde“, welches das ausführlichste und gründlichste Werk über einschlägige Versuche sein dürfte, sind ausser seinen eigenen Beobachtungen auch jene von van der Willigen zu Harlem gemachten angeführt. Diese letzteren ergeben aus einer Beobachtung, welche 11 Stunden lange fortgesetzt wurde, 12°88, aus 4 Stunden 11°24, während der

theoretische Werth 11°91 beträgt. Ferners sind Mittelwerthe aus Versuchen, welche eine Zeit von je 60 Stunden umfassen, angegeben, diese sind: 12°03, 12°11, 11°97, 11°81. Das Mittel dieser Werthe, welche eine Zeit von 240 Stunden repräsentiren, ist 11°98, weicht also noch um 4′2 von dem theoretischen Werthe ab. Diese Versuche, welche eine so grosse Beobachtungszeit erforderten, stimmen daher nicht besonders mit dem wahren Werthe überein.

K. Onnes gibt als grösste Abweichung bei seinen Versuchen, welche eine Zeit von 5 Stunden in Anspruch nahmen, 0°8 an, durchschnittlich war der Fehler bei den Versuchen aber nur 0°3 und das Mittel aus mehreren Versuchen war bis auf 0°1 genau, während sein Gesammtmittel, welches eine Beobachtungszahl von 45 Stunden umfasste, bis auf 0°01 stimmte.

Die hier angeführten Versuche, bei welchen die Einzelbeobachtung nur 15 Minuten lange dauerte, zeigen als grösste Abweichung überhaupt 0°7, während jeder vollständige Versuch, welcher gegen 5 Stunden in Anspruch nahm, durchschnittlich auf 0°04 genau war. Das Mittel aus den vier hier angeführten Versuchen, die eine Beobachtungszeit von circa 22 Stunden umfassen, ist 11° 00′ 37″5, weicht daher von dem wahren Werthe um 10″5 ab.

II. Um Lissajous'sche Figuren, deren Schwingungsverhältniss nahe der Einheit liegt,

zu erzeugen, da man an ihnen ihren Einfluss auf die Drehung der Achsen und den Rotationssinn der, sozusagen, Ellipsen sehr deutlich übersehen kann, wurde der Pendeldraht in beiläufig $^1/_3$ seiner Länge an das freie Ende einer horizontalen, an ihrem andern Ende aber gut fixirten Eisenlamelle geklemmt. Dadurch hatte das Pendel in einer Ebene, die durch seine Ruhelage und die Lamelle gelegt war, eine gewisse Schwingungsdauer T_1, in einer zu dieser Ebenen senkrechten hatte es eine Schwingungsdauer T_2, die bedeutend grösser war als T_1, da es in diesem Falle die Lamelle 1—2 Ctm. nach beiden Seiten mitnahm. Wurde daher das Pendel unter irgend einem anderen Azimuthe ausgelassen, so führte es sofort eine Lissajous'sche Figur aus, welche dem jeweiligen Schwingungsverhältnisse entsprach. —

Dieses konnte durch Versteifen der Lamelle beliebig geändert werden. In den Figuren gibt AA' die Richtung der kleineren Schwingungsdauer an, während BB' die Richtung ist, in welcher die Lamelle mitgenommen wurde. Diese Figuren zeichneten sich besonders während ihres Entstehens durch die Regelmässigkeit und Klarheit, mit der dieser sonst schwer aufzufassende Vorgang verlief, aus.

III. Die Drehung der grossen Achse eines elliptisch schwingenden Raumpendels.

Da dieses Phänomen erst merkbarer auftritt, wenn die Amplituden des Pendels so gross sind, dass die Erhebung des Schwerpunktes über das Niveau, in welchem sich derselbe in der Ruhelage befindet, gegenüber der Pendellänge nicht mehr sehr klein sind, so wurde die Länge des früher beschriebenen Pendels auf 2·674 Met. reducirt. Es trat dann schon nach fünfzig Schwingungen eine gut messbare Ablenkung ein. Um dieselbe auch aus den Dimensionen der gezeichneten Ellipse zu rechnen, wurde die in solchen Fällen allgemein gebrauchte Formel

$$w = \frac{3\pi}{4 l^2} ab$$

benützt, in welcher ab das Product der Halbachsen und l die Pendellänge bedeuten; ein zweites und drittes Glied mit höheren Potenzen von l, welche auch manchesmal zu finden sind, waren schon ohne Einfluss und wurden daher weggelassen.

Wegen der geringen Pendellänge und grösseren Amplituden war zu erwarten, dass die beim Foucault'schen Versuche auftretenden Störungen auch hier und in erhöhtem Masse eintreffen würden.

Es wurde daher der Versuch in der Art gemacht, dass ein und dieselbe Ellipse wenigstens in vier um 45° abstehenden Azimuthen beobachtet wurde. Dies geschah dadurch, dass auf einem Probeblatte die Azimuthe und durch concentrische Kreise die beiden Achsen der gewünschten Ellipse angegeben waren. Durch passendes Anregen und Dämpfen konnte man dann die verlangte Ellipse erreichen. Darauf wurde das Blatt entfernt und die erste Ellipse verzeichnet. Nach Ablauf von fünfzig Umläufen wurde eine zweite und dann eine dritte Ellipse markirt. Der

Winkel, welchen die Achsen dieser Ellipsen einschlossen, wurde wieder mit Hilfe eines Kreises gemessen, der aus dem gemeinsamen Mittelpunkte geschlagen alle Ellipsen schnitt.

Sind 1, 2, 1′, 2′ die aufeinanderfolgenden Schnittpunkte zweier Ellipsen mit dem Kreise, so ist der Winkel der Achsen das arithmetische Mittel aus den zu den Sehnen $\overline{12}$ und $\overline{1'2'}$ gehörigen Winkeln. Um diesen Winkel auch aus der Formel zu berechnen, wurden ausser diesen Sehnen noch die Achsen der Ellipsen gemessen und das Mittel der zu Beginn und der nach Ablauf der fünfzig Umläufe herrschenden Achsen verwendet.

Die während der Beobachtungszeit erfolgte Drehung der Pendelebene in Folge der Drehung der Erde war in den mit + bezeichneten Versuchen hinzu zu addiren, während in den mit — bezeichneten abzuziehen.

Die erhaltenen Resultate sind:

Nr.	ab	$\frac{50w}{ab}$=Const.	50 w		Differenz
			Gerechnet	Beobachtet	
I +	49697	0·00009081	4°69	4°51	0°18
I′ +	48653	9336	4 59	4 54	0 05
II —	48858	8631	4 61	4 22	0 39
II′ —	47189	8453	4 46	3 99	0 47
III +	36179	9597	3 42	3 47	—0 05
III′ +	35396	9169	3 34	3 26	0 08
IV —	36123	8920	3 41	3 22	0 19
IV′ —	35267	8838	3 33	3 12	0 21
V +	36364	9235	3 43	3 36	0 07
V′ +	35401	9282	3 34	3 29	0 05
VI —	35869	9195	3 39	3 20	0 09
VI′ —	35110	9183	3 31	3 22	0 09
Mittel		0·00009079			0 16

Aus der Pendellänge rechnet sich obige Constante zu 0·00009440, so dass der obige Mittelwerth um circa 4$^0/_0$ kleiner erscheint, wovon auch noch ein Theil auf den Einfluss der Reibungswiderstände kommt, welche auch einen den Winkel w ver-

kleinernden Effekt bewirken. Um dies genauer bestimmen zu können, hätte die Zahl der Azimuthe wie beim Foucault'schen Versuche von vier auf zwölf erhöht werden müssen.

In Fig. 10 ist noch ein dem Versuche VI entsprechendes Tableau abgebildet, welches die Art, wie derselbe angestellt wurde, deutlich erkennen lässt.

Fig. 11 zeigt noch die grosse Regelmässigkeit der Dämpfung bei grösserem Drucke der Feder und geringerer Masse der Pendelkugel. Leider wurde diese Figur mit violetter Anilintinte angefertigt, wodurch deren Reproduction enorm erschwert wurde und trotzdem steht das Bild dem Originale an Regelmässigkeit noch ziemlich nach.

Durch diese Resultate scheint gezeigt, dass der hier beschriebene Apparat nicht nur zur Demonstration, sondern auch zu genaueren Messungen brauchbar ist.

Fig. 1.

¼ der nat. Grösse.

Lith. v. F. Schima in Wien. Druck v. J. Barth i

Fig. 2.

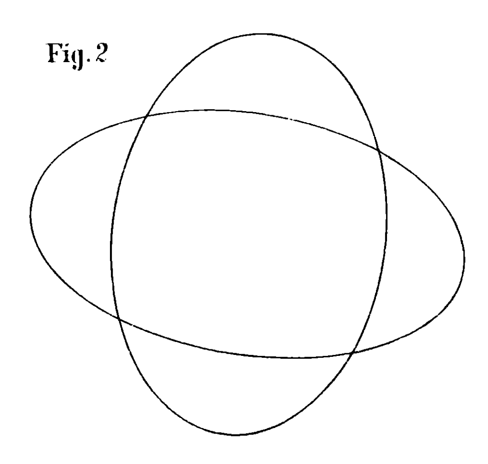


Fig. 3.

105° 90° 120° 75° 135° 60° 150° 45° 165° 30° 180° 15° 0°

1/4 der nat. Grösse.

Lith. v. F. Schima in Wien. Druck v. J. Barth in Wien.

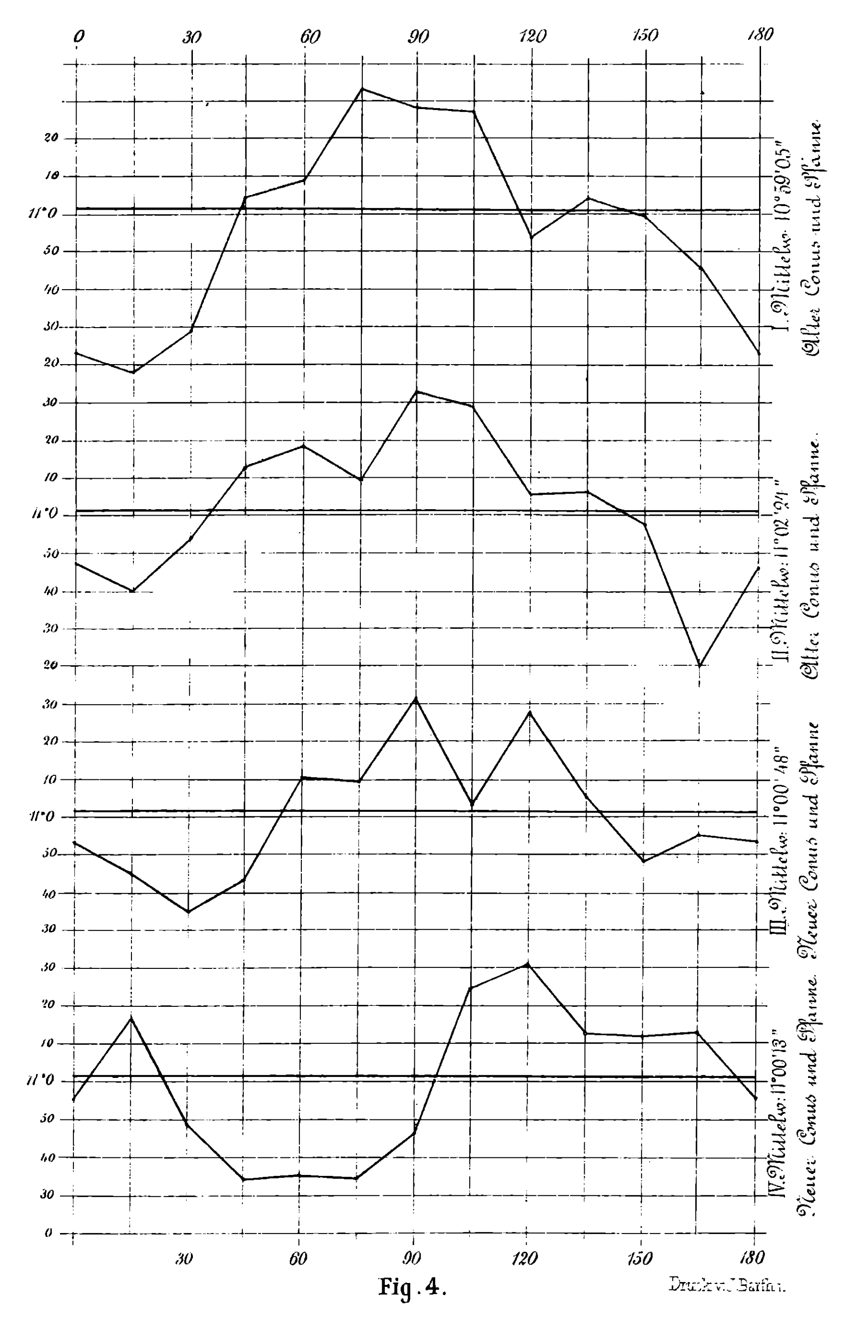
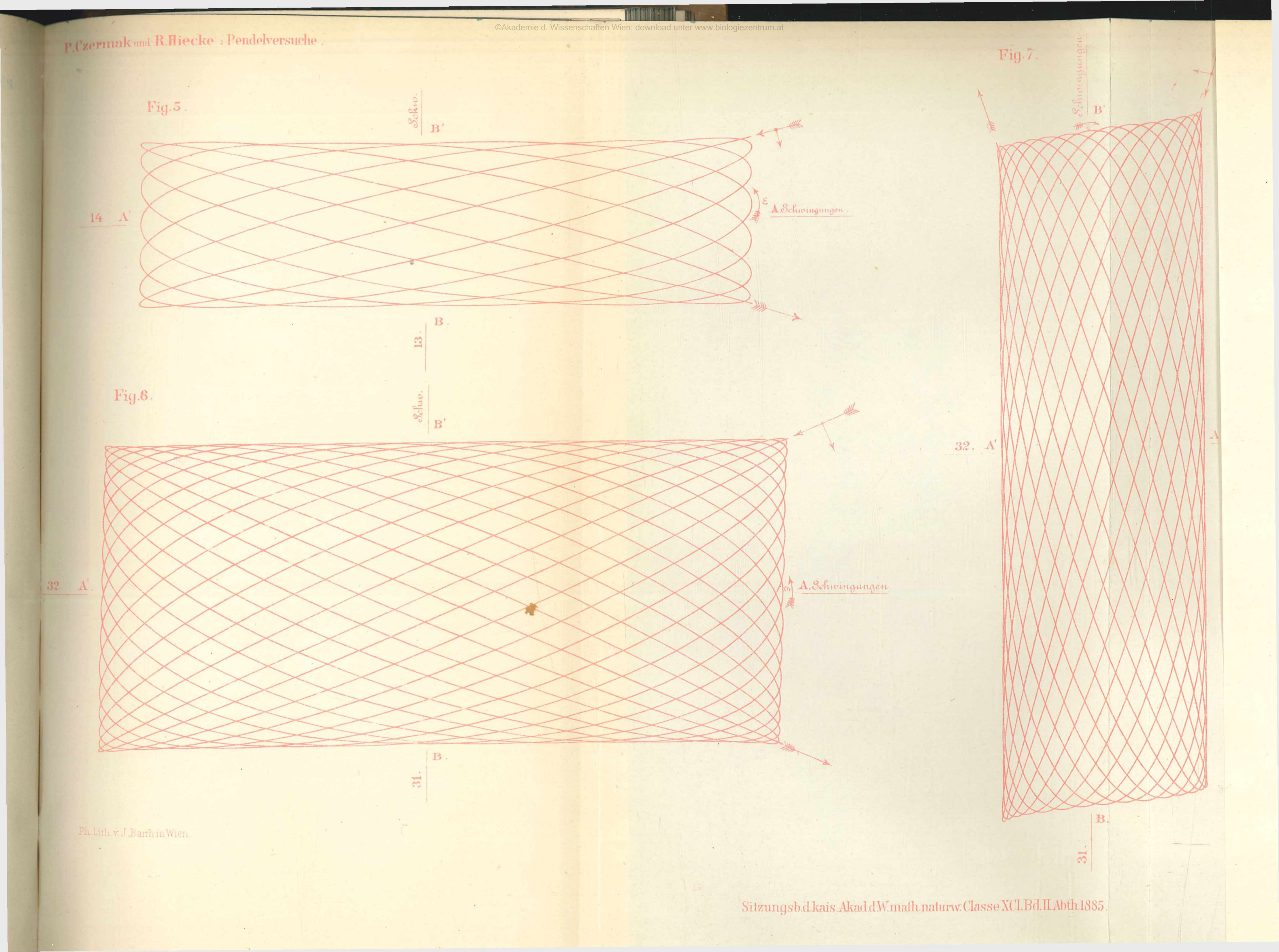

0
30
60
90
120
150
180
11°0
I. Mittelw. 10°59'05"
Alter Conus und Pfanne
II. Mittelw. 11°02'24"
Alter Conus und Pfanne.
III. Mittelw. 11°00'48"
Neuer Conus und Pfanne
IV. Mittelw. 11°00'13"
Neuer Conus und Pfanne.
Druck v. J. Barth

Fig. 4.



Ph. Lith. v. J. Barth in Wien.

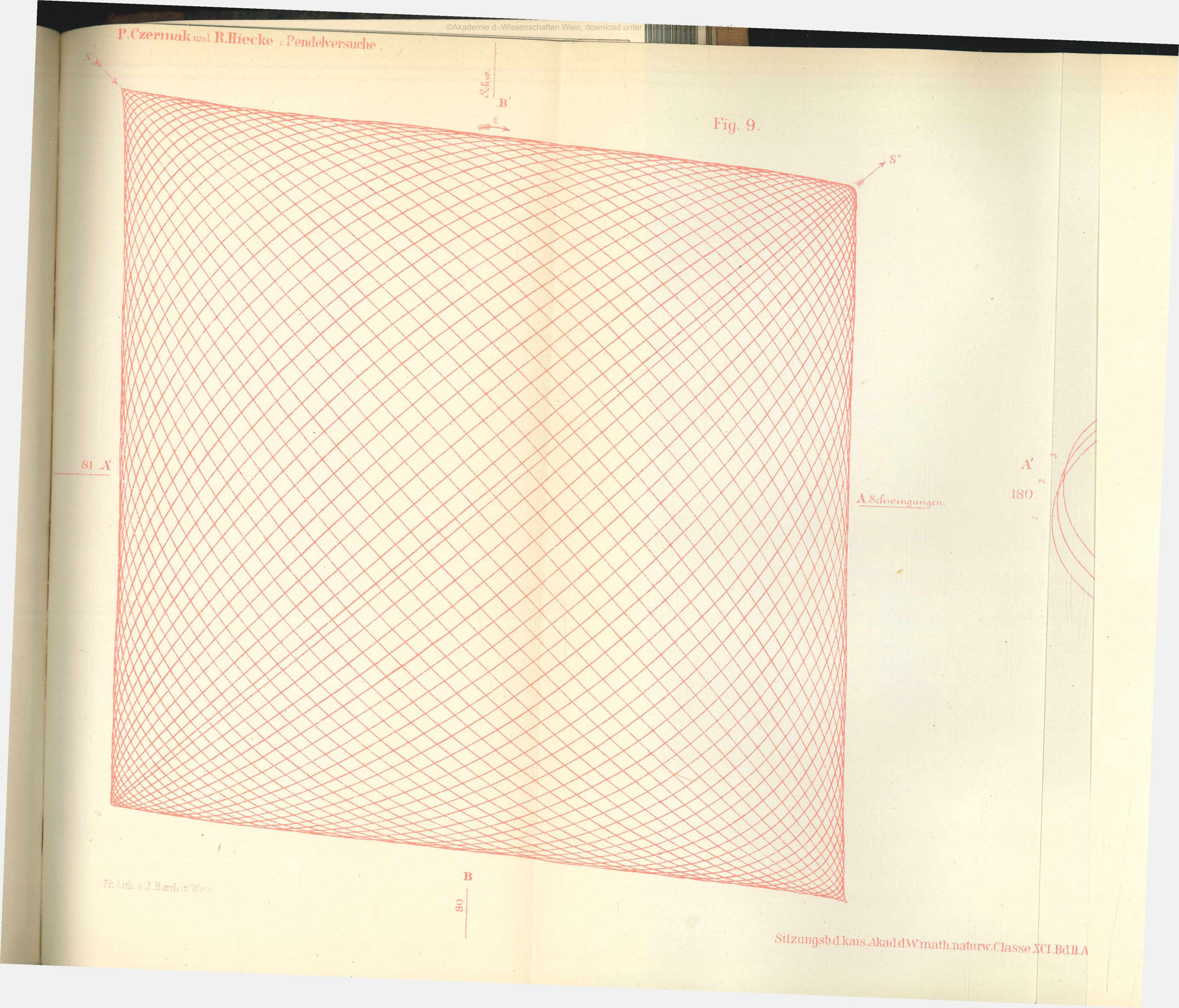
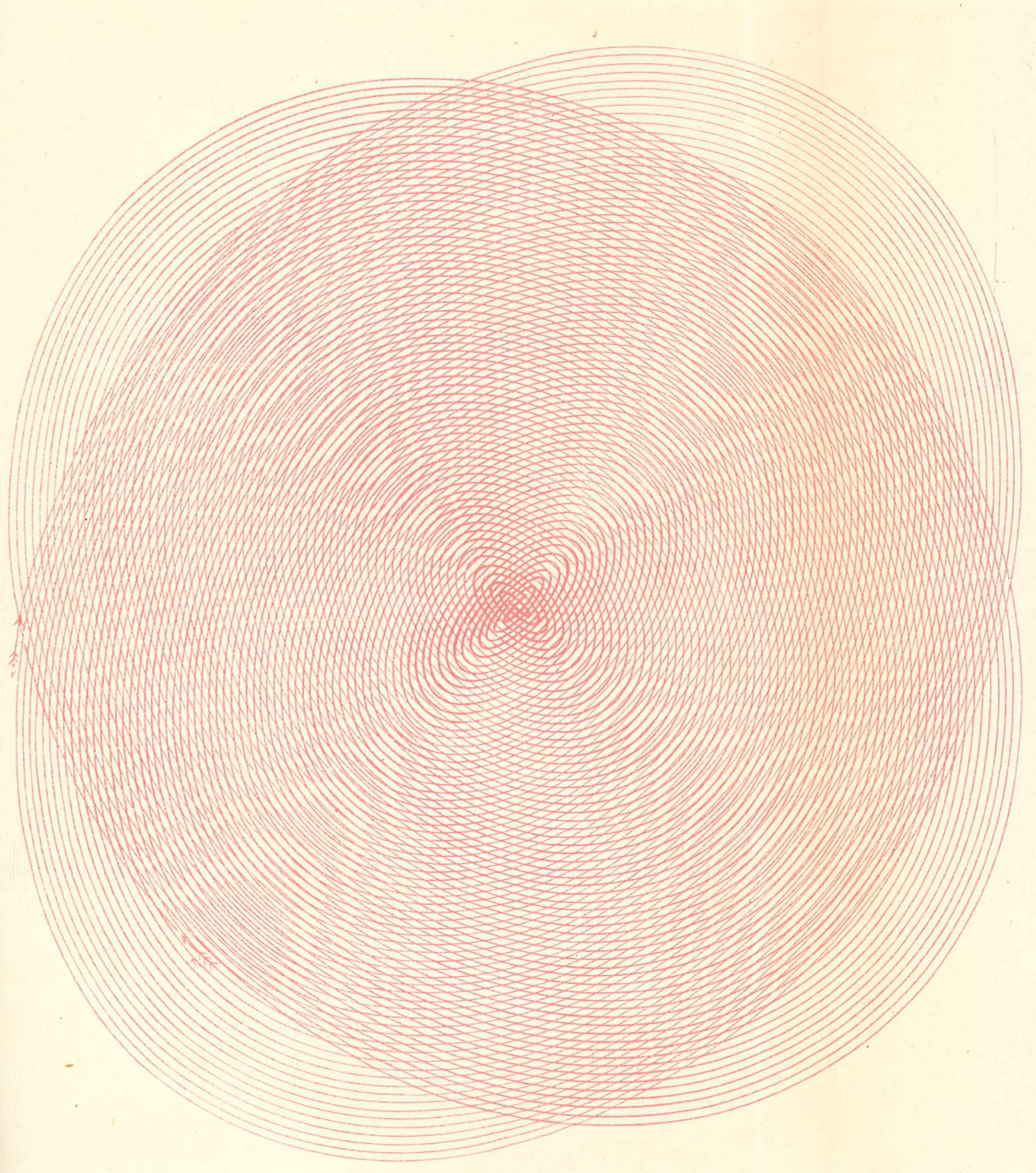


Fig. 9.

Ph. Lith. v. J. Barth in Wien.

Fig. 11.



Ph. lith. v. J. Barth in Wien. Druck v. J. Barth in Wien.